Часть 2. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

* 1. Комплексные числа, действия над ними (стр 71)

Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие следующим комплексным числам:

1) a) z = 3; b) z = -2; c) z = -2i; d) z = 3i; e) z = 2 + i; f) z = -2 + 3i; g) z = -3 – 4i; k) z = 3 – 2i

Найти z1 + z2; z1 – z2; z1z2; :

2) z1 = 3 – 2i, z2 = 1 + i.

3) z1 = 17 – i, z2 = 2 – i.

4) z1 = 5 – 3i, z2 = 7 + 2i.

5) z1 = 4 – 5i, z2 = 1 – 3i.

Выполнить указанные действия:

6) (2 + 3i)(3 – 2i) + (2 – 3i)(3 + 2i).

7) (5 – 2i)2.

8) (1 + 2i)2 – (1 – 2i)2.

9) (3 + i)3.

10) .

11) .

12) .

13) .

14) .

Найти действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

15) .

16) .

17)

18) .

Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

19) i.

20) -3.

21) 1 + i123.

22) 3i.

23) 1 + i.

24) .

25) -1 - i.

26) 1 - i.

27) - i.

28) 3 + 4i.

29) -3 - 4i.

30) .

31)

32)

33) (-4 + 3i)3.

34) (1 + i)8 (1 - i)-6.

35)

Доказать равенства:

36) z + = 2 Re z.

37) z − = 2i Im z.

38) Re z = .

39) Im z = .

40) .

41) .

42) .

43) .

44) .

45) .

46) .

Дать геометрическое описание множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

47) Re z > 0.

48) Im z ≤ 1.

49) | Re z| < 1.

50) | Im z| < 1, 0 < Re z < 1.

51) |z| ≤ 1.

52) |z − i| > 1.

53) 0 < |z + i| < 2.

54) 1 < |z − 1| < 3.

55) 0 < arg z < .

56) |π − arg z| < .

Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:

57) Im z2 = 2.

58) Re 2 = 1.

59) Im .

60) Re = 1.

61) z2 + 2 = 1.

62) |z| = Re z + 1.

Найти все значения корней:

63) .

64) .

65) .

66) .

67) .

68) .

69) .

70)

71)

72) .

Вычислить:

73) (1 + i)8(1-i)6.

74) (1 – i)7(1 + i)6.

75) .

76)

Найти решения следующих уравнений:

77) z2 = i.

78) z2 = 3 – 4i.

79) z3 = -1.

80) z6 = 64.

81) z7 + 1 = 0.

82) z8 = 1 + i.

83) z2 – 2z + 2 = 0.

84) z3 + 6z2 + 12z + 10 – 2i = 0.

85) z2 – (2 + 3i)z + 6i = 0.

86) z2 + (3 – 4i)z – 12i = 0.

87) z6 + 4z3 + 8 = 0.

* 1. Последовательности и ряды комплексных чисел (стр 80)

Исходя из определения предела последовательности, доказать:

88) .

89) .

90).

Вычислить пределы:

91)

92)

93)

94) .

95).

Выяснить, при каких z существуют пределы:

96) .

97) .

98) .

99)

Доказать равенство:

100) , где z = x + iy. Указание. Найти пределы последовательностей модулей и аргументов.

Доказать, что:

101) тогда и только тогда, когда .

Исследовать сходимость следующих рядов:

102) .

103) .

104) .

105) .

106) .

107) .

108) .

109) .

110) .

111) .

112) .

113) .

114) .

115) .

116) .

117) .

118) .

119) .

Доказать абсолютную сходимость следующих рядов:

120) .

121) .

122) .

123) .

* 1. Функции комплексного переменного (стр 89)

Записать в показательной форме числа:

124) 1) z = -1, 2) z = i, 3) z = 1 – i, 4) z = .

Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел:

125) 1) е 3+2i, 2) e1-3i , 3) e2+5i , 4) e3-7i , 5), || < π, 6) , || < π.

Вычислить значения ez в точках:

126) 1) z = 2πi, 2) z = πi, 3) z = , 4) z = , 5) z = .

Доказать, что:

127) |ez| = eRe z.

128) ez+2πi = ez.

Доказать равенства:

129) cos(-z) = cos z.

130) sin(-z) = - sin z.

131) ch(-z) = ch z.

132) sh(-z) = - sh z.

133) cos2 z + sin2 z = 1.

134) ch2 z – sh2 z = 1.

135) sin(z1 + z2) = sin z1 cos z2 + cos z1 sin z2.

136) cos(z1 + z2) = cos z1 cos z2 + sin z1 sin z2.

137) ch(z1 + z2) = ch z1 ch z2 + sh z1 sh z2.

Пусть z = x + iy. Доказать, что:

138) .

139).

140) .

141) .

Найти действительные и мнимые части следующих чисел:

142) 1) z = cos(2 + i), 2) z = sin 2i, 3) z = sh(-2 + i), 4) z = ch i, z = tg(2 – i).

Найти множество точек, в которых следующие функции принимают действительные значения:

143) 1) ez, 2) cos z, 3) sin z.

Найти множество точек, в которых следующие функции принимают чисто мнимые значения:

144) 1) ez, 2) sin z, 3) ch z.

Вычислить:

145) 1) Ln e, 2) Ln(-1), 3)Ln i, 4) Ln(3-4i), 5) Ln(-4+3i), 6) Ln, 7) Ln.

Найти значения степеней:

146) 1), 2), 3) , 4) , 5) , 6) .

Вычислить:

147) 1) Arcsin , 2) Arccos, 3) Arccos(2), 4) Arcsin i, 5) Arctg(1+2i).

Найти решения следующих уравнений:

148) ln(z + i) = 0.

149) ln(i – z) = 1.

150) e-z + 1 = 0.

151) ez + i = 0.

152) .

153).

154) .

155) .

156) .

157) .

Найти прообразы следующих линий при отображении

158) 1) u = 3, 2) v = 5.

Найти образы следующих линий при отображении :

159) 1) x = 3, 2) y = 5, 3) |z| = R, 4) y = x, 5) (x – 2)2 + y2 = 1, 6) arg z = α, 7) |z - 1| = 1.

* 1. Дифференцирование функций комплексного переменного (стр 97)

Пусть z = x + iy. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

160) 1) Re z, 2) x2y2, 3) |z|2, 4) x2 + iy2, 5) zRe z, 6) 2xy – i(x2 – y2).

Используя производную показательной функции, доказать:

161) (sh z)’ = ch z.

162) (ch z)’ = sh z.

163) (sin z)’ = cos z.

164) (cos z)’ = -sin z.

165) (Ln z)’ = .

Найти, где дифференцируемы следующие функции, и найти их производные:

166) ech z.

167) sin(2ez).

168)

169) ze-z.

170) .

171) .

172) tg z.

173) ctg z.

174) .

175) .

176) (ez – e-z)2.

177)

Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций:

178) 1) zn, 2) ez, 3) cos z, 4) Ln z.

Найти все точки, в которых коэффициент линейного растяжения равен единице:

179) 1) w = z2 – 2z, 2) w = , 3) w = z3, 4) w = .

Найти все точки, в которых угол поворота равен нулю:

180) 1) w = iz2, 2) w = , 3) w = -z3, 4) w = z2 – 2z, 5) w = .

Определить какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается:

181) 1) w = z2, 2) w = ez, 3) w = ln(z - 1).

Пусть кривая С – луч arg(z – z0) = φ, выходящая из точки z0. Найти коэффициент линейного растяжения и угол поворота в точке z0 для этого луча при следующих отображениях:

182) 1) w = z2, z0 = 1, 2) w = w = , z0 = i, 3) w = ie2z, z0 = 0, 4) w = 2z + i, z0 = 0, 5) w = , z0 = -i.

Найти аналитическую функцию в окрестности точки z0, если известны ее действительная u(x, y) или мнимая v(x, y) часть и значение f(z0):

183) .

184) .

185)

186)

187)

188)

Выяснить, является ли данная функция действительной или мнимой частью аналитической функции:

189) 1) , 2)

* 1. Интегрирование функций комплексного переменного (стр 103)

Вычислить интегралы:

190) .

191) .

192)

193) .

194)

Вычислить интегралы где:

195) Г – радиус вектор точки 2 + i.

196) Г – верхняя полуокружность |z| = 1 (начало пути в точке z = 1).

197) Г – окружность |z – 2| = 3, проходимая против часовой стрелки.

Вычислить интегралы , где:

198) Г – отрезок z = (2 – i)t, 0 ≤ t ≤ 1.

199) Г – окружность |z| = 5, проходимая против часовой стрелки.

200) Г – левая полуокружность |z| = 1 (начало пути в точке z = i).

Вычислить интегралы:

201) , где Г – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности |z| = 1 и отрезка -1 ≤ Re z ≤ 1, Im z = 0.

202) , где Г – отрезок прямой, соединяющий точки z1 = 0, z2 = 1 + i.

203) , где Г – линия, состоящая из правой полуокружности |z – i| = 1 и отрезка, соединяющего точки z1 = 2i, z2 = 3i.

204) , где Г - |Im z| ≤ 1, Re z = , – начало пути.

Найти первообразные функций:

205) 1) eaz, 2) ch az, 3) sh az, 4) cos az, 5) sin az, 6) zeaz, 7) z2ch az, 8) z cos az.

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, вычислить:

206).

207)

208) , по отрезку соединяющему точки z1 = 1, z2 = i.

209) .

* 1. Интегральная формула Коши (стр 108)
  2. Разложение функции комплексного переменного в степенные ряды (стр 117)
  3. Ряды Лорана. Изолированные особые точки (стр131)
  4. Вычеты и их применение (стр 139)